УДК 162.6:514.13
https://doi.org/10.5281/zenodo.808772
orcid.org/0000-0003-4367-5326

Людмила Шенгерій

ШЕНГЕРІЙ Людмила Миколаївна *– доктор філософських наук, професор, завідувач кафедри вищої математики, логіки та фізики Полтавської державної аграрної академії. Сфера наукових інтересів – логіка, теорія раціональності, логіко-філософські проблеми математики.*

ЛОГІКО-АНАЛІТИЧНА РЕКОНСТРУКЦІЯ СТАНОВЛЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ПАРАДИГМИ (НА ПРИКЛАДІ СТВОРЕННЯ НЕЕВКЛІДОВИХ ГЕОМЕТРІЙ)

У статті на прикладі створення та обґрунтування неевклідових геометрій як фундаментального відкриття проводиться логіко-аналітична реконструкція становлення математичної парадигми. Показано, що неевклідовим геометріям притаманні усі суттєві ознаки фундаментального відкриття. Неевклідові геометрії слугують розв'язком фундаментальної проблеми обґрунтування математичного знання. Відкриття та компоненти створення неевклідових геометрій як фундаментальної проблеми підготовлені історичним розвитком математичних знань. Доведено, що ідеї неевклідових геометричних систем виникають на підставі суто логічних розмірковувань про природу п'ятого постудату Евкліда. Існування неевклідових геометрій як коректно побудованих систем з точки зору логіки доводить, що наші інтуїтивні уявлення про простір R^3 не є суто логічною необхідністю.

Ключові слова*: логіко-аналітична реконструкція, неевклідова геометрія, п'ятий постулат Евкліда, фундаментальні відкриття.*

Для логіко-аналітичної реконструкції становлення математичної парадигми актуальним є аналіз класифікацій наукових відкриттів у цілому. В. І. Купцов виокремлює два типи наукових відкриттів [1]. До першого відносяться фундаментальні відкриття – відкриття, що змінюють наші уявлення про дійсність у цілому, тобто суттєво уплива-ють на світогляд суб'єкта. Другий клас складають нефундаментальні відкриття, що здійснюються на відомому науковому базисі, відносяться до чітко визначеної предметної області. Тому, приступаючи до їх розв'язування, дослідник чітко уявляє, де саме слід шукати розв'язок. Такі задачі можуть бути як алгоритмічними, стандартними, так і нестандартними, для розв'язування яких стане в нагоді професійна інтуїція, що ґрунтується на глибокому розумінні специфіки досліджуваних об'єктів та явищ. Базис, на якому здійснюються такі відкриття, є строго обмеженим. Суттєвою рисою відкриттів другого типу є знаходження найкращого (раціонального, оптимального. – Л.Ш.) розв'язку, що задовольняє стандартам красоти, швидкості, компактності тощо: «Економічність, простота, красота тощо можуть по-різному інтерпретуватися, але в будь-якому випадку утворюють важливий момент в оцінці теоретичних уявлень, і вони можуть у певних наукових ситуаціях стати вирішальними у прийнятті теорії» [2, с. 135].

Зосередимося більш докладно на аналізі фундаментальних відкриттів, оскільки саме завдяки їм з'являються нові парадигмальні уявлення в науці загалом, та в математичному знанні зокрема. Будь-який світогляд ґрунтується на деякому загальному фундаменті, що являє собою систему принципів (з точки зору логіки – систему аксіом), з яких уможливлюється виведення наслідків. Саме виокремлення системи принципів, що є спроможною слугувати основою для подальших дедуктивних виводів є надзвичайно актуальним, оскільки «не існує методу, який можна було б вивчити і систематично застосовувати для досягнення мети» [3, с. 14]. Фундаментальні відкриття вимагають виокремлення абсолютно нових принципів, що не можуть бути отримані жодною дедукцією, здійсненою на підставі існуючих принципів. Базис, на якому здійснюються такі відкриття, не є строго обмеженим. Виокремлюються наступні суттєві ознаки фундаментальних відкриттів:

– фундаментальне відкриття завжди є розв'язком фундаментальної проблеми;

– фундаментальні відкриття та компоненти розв'язування фундаментальної проблеми підготовлені історичним розвитком відповідної царини знань.

Покажемо, що в царині математики до фундаментальних відкриттів належить відкриття неевклідових геометрій. В історії розвитку геометрії можна виокремити два якісно відмінних етапи. Перший етап – від праць давньогрецьких геометрів до початку XIX століття.

Ідеальною системою в цей час є геометрична система, викладена в «Началах» Евкліда. В її рамках зміст геометричної теорії отримують дедуктивним шляхом із системи аксіом (постулатів), що задовольняють систему трьох умов:

1) є очевидно істинними твердженнями;
2) узгоджуються зі здоровим глуздом;
3) узгоджуються з емпіричним досвідом.

Якщо ми розуміємо термін «пряма лінія» у традиційному або класичному значенні, то ні за яких умов не вдасться провести через точку, що не належить прямій на площині, більше однієї прямої, що паралельна заданій прямій. У «Началах» Евкліда V постулат має формулювання, еквівалентне наведеному вище: «Якщо пряма, що падає на дві прямі, утворює внутрішні односторонні кути, що менші двох прямих кутів, то необмежено продовжені ці дві прямі перетинаються з того боку, де кути менші двох прямих (кутів. – Л.Ш.)» [4, с. 110]. Математичні конструкції, що побудовані згідно таких передумов, пов'язані деякою мірою з поза-математичною дійсністю, об'єктами, що мають як ідеальні, так і реальні риси. До сфери раціонального геометричного аналізу включаються виключно ті об'єкти, що мають аналоги в дійсному світі. Джерелом нових ідей в математиці та геометрії зокрема слугують потреби інших галузей знань і практичної діяльності суб'єктів.

Другий етап – від початку XIX століття до нашого часу. Якісним розмежуванням із попереднім етапом стало відкриття неевклідових геометрій. Аналіз історії цього відкриття в концепції М. І. Лобачевського слугує підтвердженням тези І. І. Лапшина про неперервність, поступовість та «трьохактність» гносеологічних процесів. Упродовж першого етапу постановки проблеми 1815-1817 рр. науковець прагне різними способами обґрунтувати теорію паралельних ліній, п'ятий постулат визнається ним істинним. Наступний етап – інтелектуальне розв'язання проблеми – характеризується тезою щодо незадовільності усіх доведень, що існують, науковець ставить під сумнів істинність постулату. Результатом стає третій етап – технічна реалізація проблеми, що розпочинається у 1826 році доповіддю «Exposition succincte des principes de la geometrie», що є викладом системи, в якій V постулат Евкліда не виконується. У цій теорії V постулат Евкліда було замінено на його заперечення. У результаті побудовано змістовні геометрії, відомі як «неевклідові». З цього часу можна говорити про появу формальних математичних теорій, в яких знімаються всі три вищеописані обмеження на аксіоми (постулати). У геометрії Б. Римана раціоналізуються такі фундаментальні факти, як:

1) найкоротша відстань між точками, тобто аналог прямої лінії в евклідовій геометрії, може перетинатися з іншими найкоротшими лініями, якщо їх продовжити у нескінченність;

2) два перпендикуляри до однієї й тієї самої прямої перетинаються;

3) сума кутів трикутника більша за суму двох прямих кутів тощо. Процес раціоналізації спирається на інтерпретацію двомірної риманової геометрії як геометрії сфери, тобто викривленого, а не прямолінійного двовимірного простору: роль прямих відводиться меридіанам, при цьому паралельні меридіани перпендикулярні екватору й перетинаються на полюсах, сума кутів трикутників, що утворюються двома меридіанами та екватором, є більшою за 180º [5, с. 12]. Ідеальною конструкцією такого типу слугує застосування методу формалізації в началах логіки та математики, результатом якого стало уточнення поняття формальної системи. У системах такого типу самі логічні чи математичні теорії виступають як точні математичні об'єкти, що допускають побудову метатеорій таких теорій. Джерелом розвитку нових напрямів дослідження стають самі логічні та математичні теорії, в яких досліджуються абсолютно ідеальні об'єкти. Еволюція геометричної царини відбувається через відмову від узгодженості смислу аксіом певної геометричної теорії зі здоровим глуздом та емпіричним знанням, тобто вони також набувають більш загальних абстрактних властивостей.

Продемонструємо наявність у структурі процесу становлення неевклідових геометрій першої суттєвої ознаки фундаментального відкриття. Зазвичай створення неевклідових геометрій пов'язують із розв'язуванням проблеми п'ятого постулату Евкліда [6, с. 115-116]. До Я. Больяї, К. Гаусса та М. І. Лобачевського евклідова геометрія, як і арістотелівська логіка, виступала єдиним апріорним (І. Кант) ідеалом наукового знання, взірцем його доказовості та організації. І лише на початку XIX ст. проблема п'ятого постулату Евкліда набуває всезагального характеру з точки зору розвитку математики в цілому, насамперед, її використання у різних царинах людського життя та трансформується у проблему побудови математики на міцних логічних засадах. На початку XIX ст. математика вже майже два сторіччя активно розвивається та набуває досить складної та розгалуженої структури – у рамках математичного аналізу створено диференціальне та інтегральне числення, теорію рядів; сформувалася теорія ймовірностей як цілісна система математичних знань; значного розвитку дістали алгебраїчні дослідження. У той самий час основи математичного знання залишались досить гіпотетичними, розпливчатими та неясними. Невизначеним залишалося загальне поняття числа, та окремі його аспекти, що відносилися до від'ємних та уявних чисел. Відсутніми були визначення нескінченно малих і нескінченно великих величин, обґрунтування операцій диференціювання, інтегрування, додавання числових рядів тощо. Не існувало відповіді на запитання щодо природи ймовірності. Таким чином, проблема п'ятого постулату Евкліда, що чекала свого вирішення вже дві тисячі років, перетворюється на фундаментальну проблему математики. І насправді, п'ятий постулат – це теорема евклідової геометрії чи справжній постулат? У такому разі поняття «постулат» вимагає аналізу на метарівні, тобто філософсько-методологічного, що переводить вищевказану проблему у розряд світоглядних.

Проаналізуємо створення неевклідових геометрій з точки зору другої суттєвої ознаки фундаментальних відкриттів. Теоретичні аспекти ідеї створення неевклідових геометрій знаходимо у працях І. Канта. Визнаючи геометричну характеристику речей-у-собі, він ставить питання щодо можливості їх підпорядкування геометрії, відмінній від евклідової. Ідеї можливості створення альтернативних систем геометрії містять праці Дж. Саккері [7]. Потрактовуючи п'ятий постулат Евкліда в якості теореми, тобто проблеми другого роду та намагаючись довести її «від супротивного», він виводить близько сорока теорем неевклідової геометрії, але протиріччя не виявляє та приходить до висновку про неефективність схеми доведення «від супротивного» для даного випадку. Лише усвідомлюючи фундаментальність проблеми п'ятого постулату Евкліда, стає можливим її вирішення у рамках неевклідової геометрії.

Кожна наукова парадигма, і математична також, будується таким чином, що включає попередню в якості частинного випадку. Щодо геометричної царини, то уведення квадратичної форми

$\hat{O} = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \varepsilon\delta^2$ [8, с. 276],

де ε – параметр, що може набувати нескінченно малих значень, дозволяє потрактовувати евклідову геометрію як частинний випадок неевклідової. Тоді при $\varepsilon \neq 0$ отримуємо неевклідові геометрії, а при $\varepsilon = 0$ – геометричну систему Евкліда.

Ідеї нових геометрій виникають на підставі суто логічних розмірковувань. Оскільки неевклідові геометрії існують, то аксіома Евкліда не є наслідком основних понять і аксіом, що їй передують і не існує нічого такого, що б логічно спонукало нас до прийняття цієї аксіоми. Дійсно, замінюючи п'ятий постулат Евкліда протилежним твердженням і залишаючи усі інші аксіоми незмінними, ми не лише не виявляємо жодного протиріччя, але й отримуємо неевклідові геометрії як дисципліни, що є коректно побудованими з точки зору логіки так само, як і евклідова геометрія. Тому наші онтологічні уявлення про простір, що описуються у тому числі аксіомою паралельних, не є суто логічною необхідністю [8, с. 273].

Створення неевклідових геометрій ілюструє важливі теоретичні розмірковування [9, с. 18; 10, с. 116; 11, с. 172]. У моменти, коли під упливом фундаментальних наукових відкриттів відбувається руйнування сталих уявлень, багаточисельні явища не можуть відразу вибудуватися в єдине ціле, множинні факти допускають діаметрально протилежні витлумачення, нарешті, знаходяться дані, що суперечать одне одному, але під час поглиблення наших знань виокремлюються відсутні зв'язки, виникають узагальнення, що встановлюють строгу закономірність між фактами. Разом із тим, відсутність фундаменту наукової теорії впродовж періоду її становлення не означає повну відсутність її логічних підстав. Це означає лише відсутність строгих логічних підстав, з яких весь зміст теорії може бути виведений дедуктивним шляхом. Одночасно має право на існування теза про те, що у математиці не можна безкарно допускати утворення прірви між відкриттям і доведенням. У сприятливі для розвитку математики часи науковцю залишається лише занотовувати нові ідеї так, як він їх розуміє. Інколи навіть існує надія, що шляхом вдалих змін математичної мови та встановлених позначень він висловить те, що має місце в дійсності. Досить часто дослідник змушений робити вибір між методами некоректними, але плідними, та коректними методами, що однак позбавляють його можливості висловити свою думку без викривлень і виснажливих зусиль.

У результаті логіко-аналітичної реконструкції становлення математичної парадигми на підставі створення неевклідових геометрій можна зробити наступні **висновки**:

1. Неевклідові геометрії у силу своєї неспіввідносності з реаліями трьохвимірного простору слугують точками біфуркації для створення нових еталонних парадигмальних математичних теорій, фундаментальною ознакою яких тепер виступає несуперечливість замість онтологічної характеристики відповідності досвіду.

2. Створення неевклідових геометрій ініціювало якісну трансформацію математики як науки, уявлення про її функції в системі знання, про методи побудови та обґрунтування математичних теорій.

3. Завдяки побудові неевклідових геометрій уможливлюється знаходження відповіді на питання про природу геометричних аксіом, якщо аналізувати їх з точки зору логіки.

Література

1. Купцов В. И. Природа научного открытия / В. И. Купцов // Природа научного открытия : философско-методологический анализ. – М. : Наука, 1986. – С. 5-23.

2. Копнин П. В. Логические основы науки / П. В. Копнин. – К.: Наукова думка, 1968. – 284 с.

3. Эйнштейн А. Вступительная речь / А. Эйнштейн // Собрание научных трудов в 4 т. – Т. 4. – М. : Наука, 1967. – С. 14-17.

4. Новиков П. С. Аксиоматический метод / П. С. Новиков // Математическая єнциклопедия. – М., 1977. – Т. 1. – С. 109-113.

5. Кузнецов Б. Г. Разум и бытие. Этюды о классическом рационализме и неклассической науке / Б. Г. Кузнецов. – М. : Наука, 1965. – 384 с.

6. Шенгерій Л. М. Логіка та раціональність : монографія / Л. М. Шенгерій. – Полтава : ФОП Говоров С. В., 2009. – 223 с.

7. Saccherio H. Euclides ab omni naevo vindicatus; sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae geometriae principia / H. Saccherio. – Milan : Typographia Pauli Antonii Montani, 1733.

8. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. Т. 2. Геометрия / Ф. Клейн. – М. : Наука, 1987. – 412 с.

9. Лазарев П. П. Современные задачи молекулярной физики : Речь, академика П.П. Лазарева в торжественном годовом собрании Российской академии наук 29 декабря 1918 года. – Петроград : Тип. Рос. акад. наук, 1919. – 24 с.

10. Чудинов Э. М. Проблема рациональности науки в строительстве леса научной теории // Природа научного открытия : философско-методологический анализ. – М. : Наука, 1986. – С. 115-130.

11. Бурбаки Н. Очерки по истории математики / Н. Бурбаки. – М. : Изд-во иностранной литературы, 1963. – 292 с.

1. Kupcov V. I. Priroda naučnogo otkrytiâ / V. I. Kupcov // Priroda naučnogo otkrytiâ : filosofsko-metodologičeskij analiz. – M. : Nauka, 1986. – S. 5-23.

2. Kopnin P. V. Logičeskie osnovy nauki / P. V. Kopnin. – K.: naukova dumka, 1968. – 284 s.

3. Èjnštejn A. Vstupitel′naâ reč′ / A. Èjnštejn // Sobranie naučnyh trudov v 4 t. – T. 4. – M. : Nauka, 1967. – S. 14-17.

4. Novikov P. S. Aksiomatičeskij metod / P. S. Novikov // Matematičeskaâ ênciklopediâ. – M., 1977. – T. 1. – S. 109-113.

5. Kuznecov B. G. Razum i bytie. Ètûdy o klassičeskom racionalizme i neklassičeskoj nauke / B. G. Kuznecov. – M. : Nauka, 1965. – 384 s.

6. Šengerìj L. M. Logìka ta racìonal′nìst′ : monografìâ / L. M. Šengerìj. – Poltava : FOP Govorov S. V., 2009. – 223 s.

7. Saccherio H. Euclides ab omni naevo vindicatus; sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae geometriae principia / H. Saccherio. – Milan : Typographia Pauli Antonii Montani, 1733.

8. Klejn F. Èlementarnaâ matematika s točki zreniâ vyssej. T. 2. Geometriâ / F. Klejn. – M. : Nauka, 1987. – 412 s.

9. Lazarev P. P. Sovremennye zadači molekulârnoj fiziki : Reč′, akademika P.P. Lazareva v toržestvennom godovom sobranii Rossijskoj akademii nauk 29 dekabrâ 1918 goda. – Petrograd : Tip. Ros. akad. nauk, 1919. - 24 s.

10. Čudinov È. M. Problema racional′nosti nauki v stroitel′stve lesa naučnoj teorii // Priroda naučnogo otkrytiâ : filosofsko-metodologičeskij analiz. – M. : Nauka, 1986. – S. 115-130.

11. Burbaki N. Očerki po istorii matematiki / N. Burbaki. – M. : Izd-vo inostrannoj literatury, 1963. – 292 s.

Shengerii L. M.

LOGICAL AND ANALYTICAL RECONSTRUCTION OF FORMATION OF MATHEMATICAL PARADIGM (ON EXAMPLE OF CREATION OF NON-EUCLIDEAN GEOMETRIES)

In the article on the creation and study non-Euclidean geometries as a fundamental discovery there is made a logical and analytical reconstruction of the formation of a mathematical paradigm. It is shown that non-Euclidean geometries are inherent in all essential features of a fundamental discovery. First, non-Euclidean geometries as any fundamental discoveries serve as a solution of the fundamental problem of mathematical knowledge. Fundamental discoveries are ideological in nature, requiring separation of qualitatively new principles on which they are based. It is shown that Euclidean geometry has been a perfect geometric system since the works of ancient Greek geometers to the early nineteenth century. combining the real and the ideal features and having axioms consistent with the empirical experience and «common sense». The problem of the fifth postulate of Euclid, which was waiting for its solution for two thousand years becomes a fundamental problem in mathematics on the background of blurring of core mathematical concepts, especially «infinitely small value», «number», «probability», uncertainty of important mathematical operations as «differentiation», «integration», «adding numerical series» and so on. Second, discovery and components of non-Euclidean geometries as a fundamental problem are prepared by historical development of mathematical knowledge. For two thousand years there has been made mathematicians' attempts to clarify the nature or prove the fifth postulate of Euclid. Theoretical aspects of the idea of creating of geometries other than Euclidean geometries are found in works of Kant, John. Sakkeri and others. All of them are inherent in a problem of interpretation of Euclid's fifth postulate as a non-fundamental one, making it impossible for an adequate interpretation of the results. Awareness of the fundamental problem of the fifth postulate of Euclid is the key to its solution. It is proved that the ideas of non-Euclidean geometry systems arise from purely logical speculation about the nature of the axioms of Euclid. The existence of non-Euclidean geometries aslogically and correctly constructed systems prove that our intuitive understanding of space is not a purely logical necessity.

Keywords: logical and analytical reconstruction, non-Euclidean geometry, Euclid's fifth postulate, fundamental discovery.

Надійшла до редакції 6.04.2017 р.